QCA : 15/I

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ : Paper-I

MATHEMATICS : Paper-I

2014

ಸಮಯ : 3 ಗಂಟೆಗಳು
Time : 3 hours

ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 250
Maximum marks : 250

ಸೂಚನೆಗಳು

INSTRUCTIONS

(i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ 2 ಭಾಗಗಳಿವೆ.

(ii) ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿ ಭಾಗದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು.

(iii) ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1 ಮತ್ತು 5ಗಳು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿವೆ.

(iv) ಉಳಿದ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 3 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ 1 ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಿಗದಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದರ ಮುಂದೆಯೇ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರವೇಶ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ ಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿಯೇ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ನೀವು ಯಾವ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ತರ ಪುಸ್ತಿಕೆಯ ರಕ್ಷಾಪುಟದಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿರುವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಬೇಕು. ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉತ್ತರವು ಇಂತಿಷ್ಟೇ ಪದಗಳಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪಾಲಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಉತ್ತರಿಸಲಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಅದರ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯಾನುಸಾರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಉತ್ತರ ಪುಸ್ತಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಪುಟ/ಭಾಗವನ್ನು ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೊಡೆದು ಹಾಕಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಅಸಂಪೂರ್ಣ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಸಹ ಉತ್ತರವೆಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are **EIGHT** questions divided in two sections and printed both in **KANNADA** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question No. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answer must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Word limit in questions, wherever specified, should be adhered to.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

ಭಾಗ–ಅ / Section-A

1. (a) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ರೇಖೀಯ ಭಾಗವನ್ನು Vಯ ಆಧಾರವಾಗಿಯಾಗಲಿ ಅಥವಾ Vಯ ಆಧಾರ ರೂಪಕ್ಕೆ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಇದರಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಒಂದನ್ನು ಮಿತಿಗೊಳಿಸಲು ಉಂಟಾಗುವ ವೆಕ್ಟರ್ ಸ್ಪೇಸ್ V(F) ಅನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 25

Every linearly independent subset of a finitely generated vector space V(F) is either a basis of V or can be extended to form a basis of V.

(b) ರೇಖೀಯ ರೂಪ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$T : R^3 \to R^3$ ಇವುಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟದು.

$T(e_1) = e_1 - e_2$

$T(e_2) = 2e_1 - e_3$

$T(e_3) = e_1 - e_2 + e_3$

Tಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ, ಶೂನ್ಯ ಸ್ಥಳ, ದರ್ಜೆ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Rನ ಪ್ರಮಾಣೀಕೃತ ಆಧಾರವನ್ನು $\{e_1, e_2, e_3\}$ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 25

Find the linear transformation

$T : R^3 \to R^3$ defined by

$T(e_1) = e_1 - e_2$

$T(e_2) = 2e_1 - e_3$

$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Also find the range, null space, rank and nullity of T given $\{e_1, e_2, e_3\}$ is the standard basis of R.

2. (a) ಟೈಲರ್ ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಮ್ಯಾಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಸ್ತರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ತಿಳಿಸಿ. $y(0) = 0$ ಕೊಡಲಾದ xನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಲ್ಲಿ $y = e^x \log(1 - x)$ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ. 25

State Taylor's theorem and hence deduce Maclaurin's expansion Expand the function $y = e^x \log(1 - x)$ in powers of x given $y(0) = 0$.

(b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ. 10

Evaluate $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(c) ತೆರೆದಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು ಗಾತ್ರವು 32 c.c. ಆಗಿದೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕಾಗಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಾಮಗ್ರಿಯೊಡನೆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 15

A rectangular box open at the top is to have a volume 32 c.c. Find the dimension of the box requiring least material for its construction.

3\. (a) $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$ ಮತ್ತು $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ಆದರೆ r ಮತ್ತು θ ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ u, v ಗಳ ಜಾಕೋಬಿಯನ್

$$J\left(\frac{u, v}{r, \theta}\right) = -4r^3$$

ಆಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ u ಮತ್ತು v ಕಾರ್ಯಗಳ ಜಾಕೋಬಿಯನ್ J ಆದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ u ಮತ್ತು v ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಜಾಕೋಬಿಯನ್ J' ಆದರೆ

ಆಗ $J \cdot J' = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ($J \neq 0$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ). 20

If $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$ and $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Prove that the Jacobian of u, v with respect to r and θ is

$$J\left(\frac{u, v}{r, \theta}\right) = -4r^3$$

If J is the Jacobian of the function u and v with respect to x and y and J' is the Jacobian of x and y with respect to u and v, then

$$J \cdot J' = 1 \quad (\text{provided } J \neq 0)$$

(b) $Z = f(x, y)$ x, y ಗಳ n ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಏಕರೂಪದ ಕಾರ್ಯಕ್ಷತ್ರವಾಗಿದ್ದಾಗ

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$$ $\forall x, y \in$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ (ಕ್ಷೇತ್ರದ ಹೊರಗೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4}\sin(2u)$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ $u = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 30

If $Z = f(x, y)$ be a homogeneous function of x, y of degree n, then prove that

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz \quad \forall x, y \in \text{domain of } f$$

Hence prove that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4}\sin(2u)$

given $u = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$

4. (a) ಗಾಮಾ ಕಾರ್ಯಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಗಾಮಾ ಕಾರ್ಯಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$\int_0^1 x^2\left(\log\frac{1}{x}\right)^3 dx$ ದ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 20

Define Gamma function.

Evaluate $\int_0^1 x^2\left(\log\frac{1}{x}\right)^3 dx$ using Gamma function.

(b) ಬೀಟಾ (β) ಮತ್ತು ಗಾಮಾ (γ) ಕಾರ್ಯಕ್ಷತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. 30

Using β and γ functions (Beta, Gamma functions), prove that

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

ಭಾಗ–ಬ / Section-B

5. (a) ಪ್ರಸ್ತುತ ಕೆಲಸದ ತತ್ವ ಎಂದರೇನು? ಮತ್ತು ಏಕಕಣದ ಮೇಲೆ ಬಲಗಳ ಕಾರ್ಯನಿರತಕ್ಕಾಗಿ ವ್ಯತಿರೇಕವಾದವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ. 25

What is principle of Virtual work and its converse for forces acting upon a single particle.

(b) ನುಣುಪಾದ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲದ ದಾರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಉಂಗುರಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಲಂಬರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಂಡಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸುತ್ತಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು. ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಲು ತಂತಿಯು ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಹಾದು ಹೋಗುವಾಗ ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಂಗುರಗಳು ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವಿರಮಿಸುವಾಗ ಅವುಗಳು ಸಮಾನ ತೂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. 25

Two small rings can slide on a smooth parabolic wire with its axis vertical and vertex upwards, being connected by a fine string which passes over a smooth peg at the focus. Show that if the rings can rest in any position in which the string is taut they must be of equal weight.

6. (a) ಬಿಂದು (2, −1, 2) ರಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈಗಳಾದ $x^2+y^2+z^2=9$ ಮತ್ತು $z=x^2+y^2-3$ ರ ನಡುವಣ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 10

Find the angle between the surfaces $x^2+y^2+z^2=9$ and $z=x^2+y^2-3$ at the point (2, −1, 2).

(b) $\vec{F}=(\sin y+z\cos x)\hat{i}+(x\cos y+\sin z)\hat{j}+(y\cos z+\sin x)\hat{k}$

ಯು ಅಭ್ರಮಿಲವಾಗಿರುವುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. ಹಾಗೂ $\vec{F}=\nabla\phi$, ಇದ್ದು ϕ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 10

Show that

$\vec{F}=(\sin y+z\cos x)\hat{i}+(x\cos y+\sin z)\hat{j}+(y\cos z+\sin x)\hat{k}$ is

irrational. Find ϕ such that $\vec{F}=\nabla\phi$.

(c) ಯಾವುದೇ ಸದಿಶ $\vec{f}$ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕಾಗಿ Curl Curl $\vec{f}=\nabla\left(\operatorname{div}\vec{f}\right)-\nabla^2\vec{f}$, ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 15

For any vector field $\vec{f}$, prove that Curl Curl $\vec{f}=\nabla\left(\operatorname{div}\vec{f}\right)-\nabla^2\vec{f}$.

(d) ಲಂಬಕೋನೀಯ ವಕ್ರರೇಖೀಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯ ಸದಿಶಕ್ರಿಯೆಯ ವಿಕೀರ್ಣತೆಗಾಗಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 15

Find the expression for divergence of a vector function in orthogonal curvilinear coordinates.

7. (a) ಬಿಂದುವು ನಿಶ್ಚಲತೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ 18 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಆವರ್ತನದೊಂದಿಗೆ 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ 10 ಅಡಿಯನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತದೆ. 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮುಕ್ತಾಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರ (amplitude) ಗರಿಷ್ಠ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 10

A particle starting from rest and executing with simple harmonic motion with period 18 seconds, travels 10 feet in 3 seconds. Find the amplitude, maximum velocity and velocity at the end of 3 seconds?

(b) ಸಮಾನಾಂತರ ಆಧಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಕಣವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಅದು ಅತ್ಯುಚ್ಚ ಬಿಂದುವನ್ನು ದಾಟಿ, ಆಧಾರದ ಮತ್ತೊಂದು ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವುದು. ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂಲ (base) ಕೋನಗಳು A ಮತ್ತು B ಆಗಿದ್ದಾಗ α ಕೋನವು ಪ್ರಕ್ಷೇಪದ ಕೋನವಾಗಿದ್ದಾಗ, $\tan\alpha = \tan A + \tan B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. 15

A particle is thrown over a triangle from one end of a horizontal base and grazing over the vertex falls on the other end of the base. If A and B be the base angles of the triangle and α the angle of projection, show that $\tan\alpha = \tan A + \tan B$.

(c) ನಿಶ್ಚಲತೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ತೂಕವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣ ಅವಲಂಬನೆಯ ಉಯ್ಯಾಲೆಯ ಹಗ್ಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತೂಗಾಡಿದಾಗ ಅವನು ತೂಗಾಡುವ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನವು 120° ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 10

Show that the greatest angle through which a person can oscillate on a swing with the ropes of which can support twice the persons weight at rest is 120°.

(d) ಕಣದ ಕೇಂದ್ರ ಬಲವು $au = \tanh\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಗುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ವರ್ಣಿಸಿ. ಬಲದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 15

A particle describes the curve $au = \tanh\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$ under the central force towards the pole, find the law of force.

8. (a) ಗಾಸ (Gauss) ವಿಸ್ತೃತಿ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿರೂಪಿಸಿ.

State and prove gauss divergence theorem. 25

(b) ಸ್ಟೋಕ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\oint_C (\sin z dx - \cos x dy - \sin y dx)$$

(ಇಲ್ಲಿ ಆಯತಾಕಾರದ ಪರಿಧಿಯಾಗಿದ್ದು $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1, z = 3$. 25

Evaluate by stoke's theorem $\oint_C (\sin z dx - \cos x dy + \sin y dx)$.

where C is the boundary of the rectangle

$0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1, z = 3$.

QCA : 15/II

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ : Paper-II

MATHEMATICS : Paper-II

2014

ಸಮಯ : 3 ಗಂಟೆಗಳು
Time : 3 hours

ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 250
Maximum marks : 250

ಸೂಚನೆಗಳು

INSTRUCTIONS

(i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **2** ಭಾಗಗಳಿವೆ.

(ii) ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿ ಭಾಗದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು.

(iii) ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ **1** ಮತ್ತು 5ಗಳು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿವೆ.

(iv) ಉಳಿದ **6** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ **3** ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ **1** ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಿಗದಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದರ ಮುಂದೆಯೇ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರವೇಶ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ ಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿಯೇ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ನೀವು ಯಾವ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ತರ ಪುಸ್ತಿಕೆಯ ರಕ್ಷಾಪುಟದಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿರುವ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಬೇಕು. ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉತ್ತರವು ಇಂತಿಷ್ಟೇ ಪದಗಳಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪಾಲಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಉತ್ತರಿಸಲಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಅದರ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯಾನುಸಾರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಉತ್ತರ ಪುಸ್ತಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಪುಟ/ಭಾಗವನ್ನು ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೊಡೆದು ಹಾಕಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಅಸಂಪೂರ್ಣ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಸಹ ಉತ್ತರವೆಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are **EIGHT** questions divided in two sections and printed both in **KANNADA** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question No. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answer must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Word limit in questions, wherever specified, should be adhered to.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

ಭಾಗ–ಅ / Section-A

1. (a) ಪ್ರತಿ ಪರಿಮಿತ ಸಮೂಹವೂ ಒಂದು ಪರ್ಮುಟೇಷನ್ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪಿ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 25

Prove that every finite group is isomorphic to a permutation group.

(b) 'G' ಯು ಒಂದು ಸಮೂಹ ಹಾಗೂ 'N' ಎಂಬುದು 'G' ಯ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಉಪಸಮೂಹ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. $f(x) = Nx \; \forall x \in G$ ದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಿದ $f : G \to G/N$ ಆಗಿರಲಿ ಹಾಗಾದರೆ G/N ಮೇಲೆ f ನ್ನು G ಯ ಸಮರೂಪತ್ವವೆಂದು ಹಾಗೂ ಕರ್ನೆಲ್ f = N ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 25

Suppose G is a group and N is a normal sub-group of G. Let $f : G \to G/N$ defined by $f(x) = Nx \; \forall x \in G$, then prove that f is a homomorphism of G on to G/N and Kernel f = N.

2. (a) ಎಲ್ಲಾ ಸಮೂಹಗಳ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾಕೃತಿಯ ಸಂಬಂಧವು ಸಮಾನ ಗುಣ ಸಂಬಂಧ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. 25

Prove that the relation of isomorphism in the set of all groups is an equivalence relation.

(b) ಎಲ್ಲ $a, b \in G$ ಗಳಿಗೆ ಮೂರು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ m ಗೆ $(ab)^m = a^m b^m$ ಆಗಿರುವಂತೆ G ಯು ಒಂದು ಸಮೂಹವಾಗಿದ್ದರೆ. ಆಗ G ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಬೇಲಿಯನ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 25

If G is a group such that $(ab)^m = a^m b^m$ for three consecutive integers m for all $a, b \in G$. Show that G is abelian.

3. ಈ ಭಾಗಶಃ ವಿಕಲನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿರಿ.

$$4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=3u$$

ಚಲಪರಿಮಾಣದ ಬೇರ್ಪಡೆ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಗೆಹರಿಸಿರಿ.

$u(0, y)=2e^{5y}$ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ 50

Solve the partial differential equation $4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=3u$ given that $u(0, y)=2e^{5y}$ by the method of separation of variables.

4. (a) (i) AB ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು

(ii) $c : x = t, y = t^2$ ಬಾಗುರೇಖೆಯಲ್ಲಿ

$\int_c xz\, dz$ ನ್ನು A(1, 1) ರಿಂದ B(2, 4) ರವರೆಗೆ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 25

Evaluate $\int_c xz\, dz$ from A(1, 1) to B(2, 4)

(i) along the straight line AB

(ii) along the curve $c : x = t, y = t^2$

(b) $f(Z)=\frac{Z}{(Z+1)(Z+2)}$ £ÀÄB

(i) $Z = 0$ (ii) $Z = 2$

ದೊಂದಿಗೆ ಟೇಲರ್ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ. 25

Expand $f(Z)=\frac{Z}{(Z+1)(Z+2)}$ in a Taylor's Series about

(i) $Z = 0$ (ii) $Z = 2$

ಭಾಗ–ಬ / Section-B

5. (a) ಎರಡು ಸಮಾನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಳು ಸಮಾನ ಸ್ಥಿರಾಂಕ C ಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸ್ಪ್ರಿಂಗ್‌ಗಳಿಂದ ಜೋಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ ಆದ್ದರಿಂದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಳು ಘರ್ಷಣೆಯಿಲ್ಲದ ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಜಾರಬಹುದಾಗಿದೆ. ಸ್ಪ್ರಿಂಗಿನ ತುದಿಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾದ ಗೋಡೆಗಳಿಗೆ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಲಾಗ್ರೇಂಜ್ ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ [illegible] 25

Two equal masses are connected by springs having equal spring constant C, so that masses are free to slide on a frictionless table. The ends of springs are attached with the fixed walls. Using the Lagrangian equation, set up the differential equation of vibrating masses.

(b) ಲಾಗ್ರೇಂಜ್ ನ ಸರಳ ಲೋಲಕದ ಓಲಾಟದ ಚಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 25

Find Lagrange's equation of motion of the bob of a simple pendulum.

6. (a) ಒಂದು ಸಾರಿಗೆ ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಕಾಯ್ದಿರಿಸುವಿಕೆ ನಮೂನೆಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ್ದಾರೆ. ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಮೊದಲನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಶೇಕಡಾ 57 ರಷ್ಟು ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಎರಡನೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಮಾಡಿರುವ ತಪ್ಪುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 0.03 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯವನದು 0.02. ಒಂದು ಕಾಯ್ದಿರಿಸುವಿಕೆ [illegible] ನಮೂನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೋಷ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ. ಇದು

(i) ಮೊದಲನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಅಥವಾ

(ii) ಎರಡನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 25

In a transport office two persons are engaged in checking reservation forms, on an average, the first person checks 57% of the forms, while the second does the remaining. The first person has an error rate of 0.03 and second has an error rate of 0.02. A reservation form is selected at random from the total number of forms checked during a day, and is found to have an error. Find the probability that it was checked

(i) by the first

(ii) by the second person

(b) ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಜನ ಅಕ್ಕಿಯ ಬಳಕೆದಾರರು ಆದ್ದರಿಂದ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಗ್ರಾಹಕತ್ವದ (ಬಳಕೆಯ) ಅವಕಾಶವು 1/2 ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಮತ್ತು 100 ತನಿಖೆದಾರರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ 10 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವರು ಗ್ರಾಹಕರೋ ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದಾಗ, ಮೂರು ಜನ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಜನರು ಗ್ರಾಹಕರು ಎಂದು ವರದಿ ಮಾಡಲು ನೀವು ಎಷ್ಟು ಜನ ತನಿಖಾಧಿಕಾರಿಗಳು ಬೇಕು ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೀರಿ ? 25

Assuming that half the population are consumers of rice so that the chance of an individual being a consumer is 1/2. Assuming that the 100 investigators each take 10 individuals to see whether they are consumers how many investigators do you expect to report that three people or less are consumers?

7. (a) ಅವರ್ತನ (ಪಾಸ್ಸಾನ್) ವಿತರಣದ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 20

State the properties of poisson distribution.

(b) ನೂರು ಟ್ಯೂಬ್ ಲೈಟ್‌ಗಳ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ಅವಧಿಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಈ ಮುಂದಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರೆತಿರುತ್ತವೆ. ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ವಿತರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ $\overline{x} = 12$ ಗಂಟೆಗಳು. $\sigma = 3$ ಗಂಟೆಗಳು ಆದಾಗ, ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ಟ್ಯೂಬ್ ಲೈಟ್‌ಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಬಾಳಿಕೆ ಅವಧಿ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

(i) 15 [illegible]

(ii) 6 ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ

(iii) 10 ಮತ್ತು 14 ಗಂಟೆಗಳ ನಡುವೆ 20

A sample of 100 tube lights tested to find the length of life produced the following results : $\overline{x} = 12$ hours, $\sigma = 3$ hours. Assuming that the data are normally distributed, what percentage of tube lights are expected to have life

(i) More than 15 hours

(ii) Less than 6 hours

(iii) between 10 and 14 hours

(c) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. 10

x	0	1	2	3	4
f	28	62	46	10	4

Fit a binomial distribution to the following data

x	0	1	2	3	4
f	28	62	46	10	4

8. (a) 'a' ಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುವಂತೆ,

$Z=\phi(x+ay)+\psi(x-ay)$ ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಆರ್ಬಿಟ್ರರಿ ಕಾರ್ಯಕತ್ವಗಳಾದ ϕ ಮತ್ತು ψ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಭಾಗಶಃ ವಿಕಲನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ.

15

Form the partial differential equation by eliminating the arbitrary functions ϕ and ψ from the relation

$Z=\phi(x+ay)+\psi(x-ay)$, where 'a' is a specified constant

(b) $(x^2-yz)p+(y^2-zx)q=z^2-xy$ ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ. 15

Solve : $(x^2-yz)p+(y^2-zx)q=z^2-xy$

(c) $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$. ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ. 20

Solve : $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$.